数理解析研究所講究録
389巻 1980年 92-101

The transfer maps in the KR_G-theory

阪市大 理学部　橋本 伸

§1 KR_G-理論

Gをinvolution τを持った実性compact Lie群，Xを実性G空間とする。

<u>定義</u>　$\xi=(p:E\longrightarrow X)$ が実性G-ベクトル束であるとは，次のi)～iv)を満たすことである。

i) ξは複素ベクトル束

ii) E，Xは実性G-空間でpは実性G-写像

iii) fibrewise にGは複素線型に作用

iv) fibrewise にτは反線型に作用

compact実性G-空間X上の実性G-ベクトル束全体にはWhitney和⊕，テンソル積⊗，外積巾Λ^iが定義されてλ-半環になる。そのGrothendieck環を$KR_G(X)$と書く([2,3])。通常の場合と同様に，compactでないXに対しては実性G-ベクトル束の複体によって$KR_G(X)$を定義する。

<u>命題1.1</u>　([2])　KR_G-理論は実性G-空間(=$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-空間)のcategoryから可換群のcategoryへのcontravariant $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-homotopy functorである。さらに$\widetilde{KR}_G$はharf exact functorである。すなわち$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-cofibration $X \to Y \to Z$に対して$\widetilde{KR}_G(Z) \to \widetilde{KR}_G(Y) \to \widetilde{KR}_G(X)$が完全列である。

VをGの実性表現空間とする。$\lambda_V = \sum_k (-1)^k \Lambda^k V$をかけることによりThom準同型$\Phi$: $\widetilde{KR}_G(X_+) \to \widetilde{KR}_G(V^c \wedge X_+)$が定義される。

<u>定理1.2</u>　([3])　Φは同型である。

準同型$c: RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2) \to R_R(G)$を次のように定義する。$U$を$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$の実表現空間とするとき，複素ベクトル空間としては$c(U) = U \otimes \mathbb{C}$，作用は$g(u+iu') = gu + i(gu')$，$\tau(u+iu') = \tau u - i(\tau u')$と定めたものである。また$RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$のinvolution jを次のように定義する。$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$の実表現空間$U$に対して$j(U)$は実ベクトル空間としては$U$，作用を$*$で書くと$g*u = gu$, $\tau * u = -\tau u$と定めたものである。$j(U)$のことを$\overline{U}$と書くこともある。複素構造を忘れる写像$F: R_R(G) \to RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$を考える。

<u>補題1.3</u>　$F\circ c = 1 + j$

これらの性質を用いることにより次の命題を得る。

<u>命題1.4</u>　KR_G-理論は$RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$-gradedな$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-cohomology理論，[5]，に拡張できる。

証明　V, W を $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$ の実表現空間，α を $V-W$ の表わす $RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$ の元とする。$\widetilde{KR}_G^\alpha(X_+)=\widetilde{KR}_G((\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+)$ と定義する。$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$ の実表現空間 U に対して懸垂同型 σ を次の列の合成によって定義する。

$$
\begin{aligned}
\widetilde{KR}_G^\alpha(X_+) &= \widetilde{KR}_G((\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+) \\
&\xrightarrow{\Phi} \widetilde{KR}_G((cU)^c\wedge(\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+) \\
&= \widetilde{KR}_G((\bar{U}\oplus\bar{V}\oplus W)^c\wedge U^c\wedge X_+) \\
&= \widetilde{KR}_G^{\alpha+U}(U^c\wedge X_+)
\end{aligned}
$$

§2　transferと誘導表現

実性G-空間はinvolutionを忘れることによりG-空間と考えることができ，実性G-ベクトル束はinvolutionを忘れることにより複素G-ベクトル束と考えることができる。これは函手の自然変換 $\psi: KR_G \longrightarrow K_G$ を導く。ψ を忘却写像とよぶ。

<u>補題2.1</u>　Thom同型はψと可換である。

KR_G-cohomologyは可容$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-束 $\xi=(p:E\longrightarrow X)$ に対して西田transfer $p_!: KR_G(E)\longrightarrow KR_G(X)$ を持つ，[6]。またξを可容G-束と考えるとK_G-cohomology はtransfer $p_!: K_G(E)\longrightarrow K_G(X)$ を持つ。KR_G-cohomologyおよびK_G-cohomology における懸垂同型はThom同型で与えられていたので，補題1.2と西田transferの定義より次の命題を得る。

命題2.2　transferはψと可換である。

Hを Gの実性閉部分群，iをその包含とする。

命題2.3　([6])　Segalの誘導写像$i_!: R(H) \to R(G)$, [7], は可容G-束$(p: G/H \to pt.)$のtransfer $p_!: K_G(G/H) \longrightarrow K_G(pt.)$と同一視される。

次の可換図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
R_{\mathbb{R}}(H) \arrow[ddd, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & & & R_{\mathbb{R}}(G) \arrow[ddd, "\psi"] \\
& KR_G(G/H) \arrow[r, "p_!"] \arrow[d, "\psi"'] & KR_G(pt.) \arrow[d, "\psi"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \\
& K_G(G/H) \arrow[r, "p_!"] & K_G(pt.) \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \\
R(H) \arrow[ur, phantom, "\cong"] \arrow[rrr, "i_!"] & & & R(G)
\end{tikzcd}
$$

この図式の上の$p_!$と同型の合成により実性誘導写像

$$i_!: R_{\mathbb{R}}(H) \longrightarrow R_{\mathbb{R}}(G)$$

を定義する。ψが単射であることよりψと可換になる誘導写像はuniqueであることがわかる。また実性表現の指標は複素表現と考えたときの指標だから，実性誘導写像についても指標公式，[7]，を使うことができる。Gへのinvolutionの作用がtrivialなとき$R_{\mathbb{R}}(G)$は自然に$RO(G)$と同型である。このとき実性誘導写像は実誘導写像$i_!: RO(H) \to RO(G)$を導く。

Eを自由実性G-空間とする。Gの実性表現Mに対して実性ベクトル束$(E \times_G M \longrightarrow E/G)$を対応させる写像$\alpha$は，$\lambda$-環準同

型 $\alpha: R_R(G) \longrightarrow KR(E/G)$ を導く。

命題2.4　次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/H) \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ R_R(G) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/G) \end{array}$$

証明の概略　$i_!$ は $p_!: KR_G(G/H) \longrightarrow KR_G(pt.)$ と考えてよい。$p_!: KR(E/H) \longrightarrow KR(E/G)$ は $p_!: KR_G(E \times G/H) \longrightarrow KR_G(E)$ と同一視できる。このとき α は自然な射影の導く写像と同一視される。可容 $G \times_\tau \mathbb{Z}_2$-束の pull back 図式に対して transfer は可換になることから命題を得る。([6] 参考)

G と E への involution の作用が trivial なとき，$R_R(G)$ は $RO(G)$ に，$KR(E/G)$ は $KO(E/G)$ に自然に同型である。G/H は trivial な $\mathbb{Z}_2$-空間であるので，$\mathbb{Z}_2$ が trivial に作用する Euclid 空間に埋め込めることに注意すれば次の系を得る。

系2.5　次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} RO(H) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/H) \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ RO(G) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/G) \end{array}$$

§3　直交群の実表現

$G = O(2m+1)$, $H = O(2) \times O(2m-1)$, diagonal に H を G の部分

群と考えその包含を i とする。Gのcanonicalな $2m+1$ 次元実表現を τ, determinantの表わす1次元実表現を ν, Hのfirst projectionの表わす2次元実表現を μ とする。

命題3.1　$\tau = i_! \mu + \nu$

証明　両辺の指標を計算する。Cartan部分群の生成元はGの中でdenseなので，その上での値だけを調べればよい。GのCartan部分群の共役類は2個あってSO$(2m+1)$ のmaximal torus T^m と $T^m \times \mathbb{Z}_2$ で代表される。ここに $\mathbb{Z}_2$ は $-I_{2m+1}$ で生成される部分群である。

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_m; \varepsilon) = \begin{pmatrix} D(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & D(\theta_m) & \\ & & & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とする。T^m と $T^m \times \mathbb{Z}_2$ の生成元は，$\theta_1, \cdots, \theta_m$ と円周率 π が有理数体上一次独立であるような $g(\theta_1, \cdots, \theta_m; \pm 1)$ と書くことができる。指標はclass functionだから，これらの元における値が一致すればよい。以下の等式は明らかである。

$$\chi_\tau(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; \pm 1)) = \sum_{k=1}^{m} 2\cos\theta_k \pm 1$$

$$\chi_\nu(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; \pm 1)) = \pm 1$$

$$\chi_\mu(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; \pm 1)) = 2\cos\theta_1$$

指標公式を使って $\chi_{i_!\mu}(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; -1))$ を計算する。簡単にするため $g(\theta_1, \cdots, \theta_m; -1)$ を g と書く。$\chi_{i_!\mu}(g) = \sum_{x \in F} \chi_\mu(x^{-1} g x)$ で

ある。ここにFはgのG/Hへの作用のfixed pt.の代表の集合である。まずFを定める。$x\in F$ならば$gxH=xH$だから$x^{-1}gx\in H$である。$x^{-1}gx$は$T^m\times\mathbb{Z}_2$に同型なHのCartan部分群T'を生成する。$T^m\times\mathbb{Z}_2$とT'はHの中で共役であることがわかるので，Hの元hが存在して$T^m\times\mathbb{Z}_2=h^{-1}x^{-1}(T^m\times\mathbb{Z}_2)xh$となる。従って$xh\in N_G(T^m\times\mathbb{Z}_2)$であるが，$xh$と$x$は$G/H$の元として等しいのでFは最初から$N_G(T^m\times\mathbb{Z}_2)$の部分集合であると仮定してよい。射影$G\longrightarrow G/H$による$N_G(T^m\times\mathbb{Z}_2)$の像は$N_G(T^m\times\mathbb{Z}_2)/N_H(T^m\times\mathbb{Z}_2)$であるのでFはその代表と考えてよい。

$$N_G(T^m\times\mathbb{Z}_2)/(T^m\times\mathbb{Z}_2)\cong\Sigma_m\int\mathbb{Z}_2$$

$$N_H(T^m\times\mathbb{Z}_2)/(T^m\times\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2\times\Sigma_{m-1}\int\mathbb{Z}_2$$

$y=(\sigma;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\Sigma_m\int\mathbb{Z}_2$, $z=(\delta;\rho;\delta_1,\cdots,\delta_{m-1})\in\mathbb{Z}_2\times\Sigma_{m-1}\int\mathbb{Z}_2$とする。ここに$\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$と考える。このとき

$$y^{-1}g(\theta_1,\cdots,\theta_m;-1)y=g(\varepsilon_1\theta_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\varepsilon_m\theta_{\sigma^{-1}(m)};-1)$$

$$z^{-1}g(\theta_1,\cdots,\theta_m;-1)z=g(\delta\theta_1,\delta_1\theta_{1+\rho^{-1}(1)},\cdots,\delta_{m-1}\theta_{1+\rho^{-1}(m-1)};-1)$$

であるから，$\chi_{i,k}(g(\theta_1,\cdots,\theta_m;-1))=\sum_{k=1}^{m}2\cos\theta_k$がわかる。同様にして，$\chi_{i,k}(g(\theta_1,\cdots,\theta_m;1)=\sum_{k=1}^{m}2\cos\theta_k$を得る。これで命題は証明された。

§4 Adams conjecture

F_nをS^nのbased homotopy同値全体の成すmonoid，BF_nをそ

の分類空間，$BF=\mathrm{colim}\,BF_n$ とする。有限CW-複体Xに対して $[X, BF]$ はX上のspherical fibre bundleのfibre homotopy同値類の成す加群と同型である，[9]。有限CW-複体Xに対し $Sph(X)=[X, BF\times\mathbb{Z}]$ と定義し，$J: KO(X)\longrightarrow Sph(X)$ を $J(\xi)=([\xi], \dim\xi)$ と定義する。Segal [8] によると $\{F_n\}$ は Γ-categoryであり，それから得られるinfinite loop spaceは $BF\times\mathbb{Z}$ である。従ってSph-理論はcohomologyであり，transferを持つ。また Γ-categoryの写像 $\{O(n)\longrightarrow F_n\}$ はinfinite loop map $j: BO\times\mathbb{Z}\longrightarrow BF\times\mathbb{Z}$ を導き $j_*=J$ となる。従ってJは安定自然変換であり，transferと可換になる。

g を素数とする。可換群Aに対して $A\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{g}]$ を $A[\frac{1}{g}]$ と書く。KO-理論上のAdams作用素 ψ^g は，$KO^*(\ )[\frac{1}{g}]$-cohomology上の安定な作用素に拡張できる，[4]。従って ψ^g は $KO(\ )[\frac{1}{g}]$-理論におけるtransferと可換である。

<u>定理4.1</u>　　(Adams conjecture)

$$J(\psi^g-1)=0: KO(X)[\tfrac{1}{g}]\longrightarrow Sph(X)[\tfrac{1}{g}]$$

証明　　この定理は一次元と二次元の場合がAdams [1] によって示された。ξ をX上の $2m+1$ 次元実ベクトル束とする。このような ξ は $KO(X)$ を加群として生成するから $J(\psi^g-1)(\xi)=0$ を示せばよい。ξ の同伴主 $O(2m+1)$-束 $(E\to X)$ を考える。§2で定義した写像 $\alpha: RO(O(2m+1))\longrightarrow KO(X)$ はcanonical表

現τをξに写す。次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
RO(H)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i_!"'] & KO(E/H)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "J"] \arrow[d, "p_!"'] & Sph(E/H)[\frac{1}{q}] \arrow[d, "p_!"'] \\
RO(G)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\alpha"] & KO(E/G)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "J"] & Sph(E/G)[\frac{1}{q}]
\end{tikzcd}$$

ここにGとHは§3と同じものとする。すると

$$\begin{aligned}
J(\psi^q-1)(\xi) &= J(\psi^q-1)\alpha(\tau) \\
&= J(\psi^q-1)\alpha(i_!\mu+\nu) \\
&= J(\psi^q-1)\alpha i_!(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= J(\psi^q-1)p_!\alpha(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= p_! J(\psi^q-1)\alpha(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= 0
\end{aligned}$$

References

[1] J. F. Adams : On the group J(X)-I, Topology 2 (1963), 181−195.

[2] M.F. Atiyah : K-theory, Benjamin 1967.

[3] M.F. Atiyah : Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 113−140.

[4] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory and completions, J. Differential Geometry 3 (1969), 1—18.

[5] C. Kosniowski : Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83—104.

[6] G. Nishida : The transfer homomorphism in equivariant generalised cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 435—451.

[7] G.B. Segal : The representation ring of a compact Lie group, Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 113—128.

[8] G.B. Segal : Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974), 293—312.

[9] D. Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239—246.